Exercícios de Álgebra Linear

Sistemas de Equações Lineares, Matrizes e Determinantes

Exercício 1 *Resolva por eliminação de Gauss os seguintes sistemas de equações lineares:*

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 4x+5y=1 \\ 12x+15y=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 2a+2b+3c=1 \\ a+2b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+7y+7z=3 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 4x+10y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=3 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2x+2y+2z+3w=3 \\ x+y+z+w=1 \\ 3x+3y+3z+2w=2 \end{cases}$ *k)* $\begin{cases} x+z+2w=0 \\ 2x+3z+3w=0 \\ y+2w=2 \\ x+2z+w=0 \end{cases}$ *l)* $\begin{cases} y_1+y_3+2y_4=0 \\ y_1+2y_2+y_3+y_4=1 \\ y_2+2y_4=8 \\ y_1+2y_3+y_4=0 \end{cases}$

Exercício 2 *Discuta, em função dos parâmetros α e β, os seguintes sistemas de equações lineares:*

$$a)\ \begin{cases} x+4y+3z=10 \\ 2x+7y-2z=10 \\ x+5y+\alpha z=\beta \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} 2x+y+z=-6\beta \\ \alpha x+3y+2z=2\beta \\ 2x+y+(\alpha+1)\,z=4 \end{cases}.$$

Exercício 3 *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x+y+3z=b_1 \\ 2x+2y-z=b_2 \\ 4x+4y+5z=b_3 \end{cases},$$

e calcule os vectores $(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ para os quais o sistema é possível.

Exercício 4 *Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:*

a) $S = \{(1+t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$;
b) $S = \{(t, 1-2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$;
c) $S = \{(3t, 2t, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$;
d) $S = \{(3t, 2s, t-1) : s, t \in \mathbb{R}\}$;
e) $S = \{(1-t, 2s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$;

Exercício 5 *Sempre que possível calcule:*

a) $2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ *k)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$ *l)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 & 4 \\ 2 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$

Exercício 6 *Mostre que a inversa de uma matriz $A \in R^{n\times n}$, quando existe, é única.*

Exercício 7 *Mostre que se as matrizes A e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são invertíveis, então também AB é invertível, tendo-se ainda $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Exercício 8 *Mostre que qualquer matriz invertível se pode decompor no produto de matrizes elementares.*

Exercício 9 *Sempre que possível, calcule a inversa de cada uma das seguintes matrizes:*

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exercício 10 *Utilizando o exercício anterior, resolva os sistemas de equações lineares:*

$$a)\ \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + z = 1 \\ y + w = 1 \\ x + 2z + w = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Exercício 11 *Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e indique as que são invertíveis*

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e)\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad f)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g)\ \begin{bmatrix} 1 & 12 & 22 & 31 \\ 0 & 3 & 11 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad i)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 12 *Sabendo que*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcule:

$$a)\ \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad d)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$$

Exercício 13 *Sabendo que os valores reais γ e δ são tais que:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & 1 & 1 \\ 1 & \gamma+\delta & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \gamma \\ \delta & \delta\gamma+\delta^2 & 2\delta \\ \delta\gamma & \gamma & \gamma \end{vmatrix}.$$

Exercício 14 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ e \ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule: a) $\det(3A)$*; b)* $\det(A^3B^2)$*; c)* $\det(A^{-1}B^T)$*; d)* $\det(A^4B^{-2})$.

Exercício 15 *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6.$$

Exercício 16 *Calcule o determinante da matriz*

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & ... & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+1 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 17 *Mostre que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1).$$